תורת הקבוצות, תרגיל 1

1. הוכח או הפרך את הטענות הבאות: לכל הקבוצות A, B, C קיים:
   א. $A \cup B = B \cap C$ אמם $A \subseteq B \subseteq C$.
   ב. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
   ג. אם $A \in B$ וגם $B \in C$ אז $A \in C$.
   ד. אם $A \subseteq B$ וגם $B \in C$ אז $A \in C$.
   ה. $A \cup (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

2. לקבוצה $\{B \mid B \subseteq A\}$, שהיא קבוצת תתי-הקבוצות של הקבוצה A אנו קוראים **קבוצת החזקה** של A ונסמן אותה ב- $\mathbf{P}(A)$. הוכח כי לכל הקבוצות A, B קיים:
   א. $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cap \mathbf{P}(B)$.
   ב. $\mathbf{P}(A) \cup \mathbf{P}(B) \subseteq \mathbf{P}(A \cup B)$. מצא תנאי הכרחי ומספיק לשיוויון.
   ג. תהי $A \in \{x\}$; האם $\{x\} \in \mathbf{P}(A)$?

3. נקרא לקבוצה A **טרנזיטיבית** אם לכל $x \in A$, $y \in x$ מתקיים $y \in A$.
   א. הוכח, כי קבוצה A היא טרנזיטיבית אם ורק אם כל איבר של A הוא תת-קבוצה של A, כלומר, לכל x קיים $x \in A \Rightarrow x \subseteq A$.
   ב. תן דוגמא לקבוצה טרנזיטיבית ולקבוצה שאינה טרנזיטיבית. (רמז: השתמש ב-$\{\emptyset\}$).
   ג. הוכח שקבוצה A היא טרנזיטיבית אמם $A \subseteq \mathbf{P}(A)$.
   ד. הוכח שאם A טרנזיטיבית אז $\mathbf{P}(A)$ טרנזיטיבית.
   ה. הוכח שאם A טרנזיטיבית אז $A \cup \{A\}$ טרנזיטיבית.

תאריך ההגשה: 2.3.2005